جامعة البعث
كليـة العلـوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الفصلية الثانية للعام الدراسي 2012 – 2013
أسئلة مقرر البنى الجبرية (1)
سنة ثانية رياضيات

العلامة: 100 درجة
الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن $3Z \cap 5Z = 8Z$.

(2) إن نظير العنصر 13 في زمرة اولر $U(21)$ هو 5 .

(3) مرتبة العنصر $<8>+14$ في زمرة الخارج $Z_{24}/_{<8>}$ تساوي 3 .

(4) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H=<3>$ في الزمرة Z_{18} يساوي **18** .

(5) جميع عناصر زمرة الخارج $U(20)/H = U_5(20)$ هم $\{H , 3H , 7H\}$.

(6) إذا كانت G زمرة مرتبتها 29 فإن G لا تكون زمرة دوارة .

(7) عدد الزمر الجزئية في الزمرة $U(10)$ يساوي 5 زمر جزئية.

(8) جميع مولدات الزمرة الجمعية Z_{20} التي لا تساوي 1 هي أعداد أولية.

(9) كل زمرة دوارة غير منتهية تملك مولدين فقط .

(10) عدد الهومومورفيزمات الزمرية من الزمرة Z_{15} إلى الزمرة Z_{30} يساوي 15.

(11) إن $U(8) \cong U(10)$ لأن للزمرتين الرتبة نفسها.

(12) توجد 3- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 3 واحدة فقط في الزمرة G التي مرتبتها 15 .

السؤال الثاني (24درجة): لتكن $(G , \cdot)$ زمرة ما، علل صحة ما يلي:

(1) إن مركز الزمرة $Z(G)$ هو زمرة جزئية من G، حيث $Z(G)=\{a\in G;\ ax=xa,\ \forall x\in G\}$.

(2) إذا كانت $G=<a>$ زمرة دوارة حيث $a\in G$ مرتبته n ، فإن مرتبة الزمرة G تساوي n.

(3) كل زمرة دوارة هي زمرة تبديلية .

(4) جميع الزمر الدوارة وغير المنتهية متماثلة (ايزومورفية مع بعضها) .

السؤال الثالث (40درجة): لتكن $(G , \cdot)$ زمرة ما. أثبت ما يلي:

(1) إذا كانت G منتهية فإن مرتبة أي زمرة جزئية H من G تقسم مرتبة الزمرة G.

(2) كل زمرة جزئية ناظميه في الزمرة G هي نواة لهومومورفيزم زمري غامر.

(3) إذا كانت A زمرة جزئية ناظمية في G ودوارة، فإن أية زمرة جزئية من A تكون ناظمية في G.

(4) إذا كانت K زمرة جزئية ناظمية في G، و P عدداً أولياً ، وكان كل من K وزمرة الخارج $G/_K$ ، P- زمرة، فإن الزمرة G تكون P– زمرة .

2013 – 7 - 4

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إيمان الخوجة

الجواب الأول [36 درجة] لكل سؤال 3 درجات

1) خطأ، $3Z \cap 5Z = 15Z$.

2) خطأ، لأن $2 = 13 \times 5$، أدخل 13 هو 13،

3) خطأ، لأن $3(14 + \langle 8 \rangle)$ يساوي $2 + \langle 8 \rangle$ ولا يساوي $\langle 8 \rangle$.

4) خطأ، عددهم ثلاثة.

5) خطأ، عناصرها $\{H, 3H, 7H, 9H\}$.

6) خطأ، لأن كل زمرة مرتبتها عدد أولي تكون دوارة.

7) خطأ، عدد الزمر الجزئية في الزمرة $U(10)$ يساوي 3 زمر

8) خطأ، 9 مولد لها وهو ليس أولياً.

9) صح.

10) صح، عدد الهومومورفيزمات الزمرية من Z_{15} إلى Z_{30} يساوي 15.

11) خطأ، لأن $U(10)$ زمرة دوارة بينما $U(8)$ ليست دوارة.

12) صح

الجواب الثاني [24 درجة] لكل طلب 6 درجات

1) بما أن $ex = xe$ أياً كان $x \in G$ نجد أن $e \in Z(G)$. ليكن $a, b \in Z(G)$ عندئذ أياً كان $x \in Z(G)$ فإن $bx = xb$ وبالتالي $xb^{-1} = b^{-1}x$. كذلك بما أن $a \in Z(G)$ فإن $ab^{-1} = b^{-1}a$ ومنه

$$(ab^{-1})x = a(b^{-1}x) = a(xb^{-1}) = (xb^{-1})a = x(b^{-1}a) = x(ab^{-1})$$

وذلك أياً كان $x \in G$ ومنه $Z(G)$ زمرة جزئية من G.

لنفرض أن مرتبة G تساوي m عندئذ

$$G=\{e, a, a^2, \dots, a^{m-1}\}$$

و m أصغر عدد صحيح موجب من أجله $e = a^m$ وهذا يبين أنه

$$m = o(a) = n$$

(3) لتكن G زمرة دوارة مولدة بالعنصر $a \in G$ ولتكن $x, y \in \langle a \rangle$

عندئذ يوجد $n, m \in \mathbb{Z}$ حيث $x = a^n, y = a^m$ ومنه

$$x.y = a^n . a^m = a^{n+m} = a^{m+n} = a^m a^n = yx$$

(4) كل زمرة دوارة وغير منتهية تكون إيزومورفية مع $\mathbb{Z}$ ومنه

فإن جميع الزمر الدوارة غير المنتهية ايزومورفية مع بعضها.

الجواب الثالث (40 درجة) لكل طلب 10 درجات

(1) لنفرض أن $a_1H, a_2H, \dots, a_nH$ جميع المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة

الجزئية H في G. وبما أن المجموعة $M_\rho = \{a_iH;\ 1 \le i \le n\}$

تشكل تجزئة للزمرة G فإن $G = a_1H \cup a_2H \cup \dots \cup a_nH$ ومنه

$$(G:1) = \text{card}\, a_1H + \text{card}\, a_2H + \dots + \text{card}\, a_nH$$

وبما أن $\text{card}\, a_iH = \text{card}\, H$ نجد $(G:1) = n\, \text{card}\, H$ أي أن

$$(G:1) = (G:H)(H:1)$$

(2) لتكن H زمرة جزئية ناظمية في G. ولنأخذ العلاقة $\pi : G \to G/H$

المعرفة بالشكل $\pi(g) = gH$ لكل $g \in G$ فإن. واضح أن π هومومورفيزم

لأنه لكل $g_1, g_2 \in G$ فإن

$$\pi(g_1 g_2) = (g_1 g_2)H = (g_1H)(g_2H) = \pi(g_1)\pi(g_2)$$

[illegible] π عناصر الزمرة $\forall xH \in G/H$ فإن $x \in G$ وبالتالي

$\pi(x)$. لنبرهن أن $Ker\,\pi = H$. ليكن $h \in H$ عندئذ

$\pi(h) = h$ ومنه $h \in Ker\,\pi$ ، أي $H \subseteq Ker\,\pi$. ليكن $k \in Ker\,\pi$ عندئذ

$\pi(k) = kH = H$ ومنه $k \in H$ وبالتالي $Ker\,\pi \subseteq H$ ومنه $Ker\,\pi = H$.

3) لتكن $A = \langle a \rangle$ حيث $a \in A$. ولتكن T زمرة جزئية من A عندئذ T زمرة جزئية في G دوارة . لنفرض أن $T = \langle a^m \rangle$ ولنبرهن أن $gTg^{-1} \subseteq T$

من أجل أي $g \in G$ ليكن $z \in gTg^{-1}$ عندئذ يوجد $(a^m)^k \in T$ بحيث $z = g(a^m)^k g^{-1}$

ومنه بما أن الزمرة الجزئية A ناظمية في G فإن $(gag^{-1})^k = ga^k g^{-1} \in A$ وبالتالي

$ga^k g^{-1} = a^s$ حيث $s \in Z$ ، وهذا يبين لنا أن

$$z = g(a^m)^k g^{-1} = g(a^k)^m g^{-1} = [(gag^{-1})^k]^m = (a^s)^m = (a^m)^s \in T$$

ومنه T ناظمية في G .

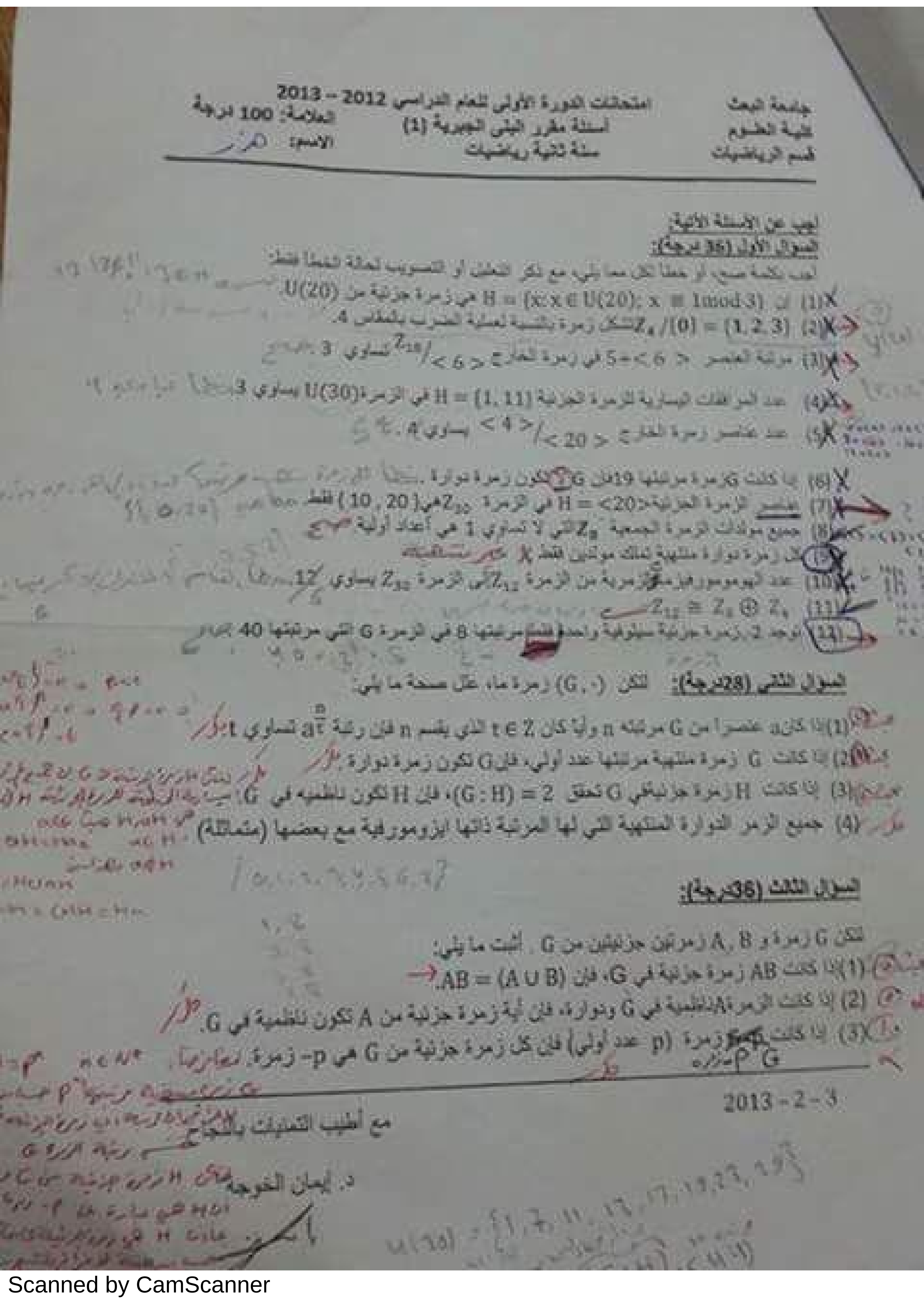
(4) لنفرض أن $(\frac{G}{K}:1) = p^r$ وأن $(K:1) = p^s$ حيث

$$(G:K) = (\frac{G}{K}:1) = p^r$$

ومنه وحسب لاغرانج فإن

$$(G:1) = (G:K)(K:1) = p^r p^s = p^{r+s}$$

ومنه G p- زمرة .



جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الأولى للعام الدراسي 2012 – 2013
أسئلة مقرر البنى الجبرية (1)
سنة ثانية رياضيات

العلامة: 100 درجة
الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح أو خطأ لكل مما يلي مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن $H = \{x : x \in U(20);\ x \equiv 1 \bmod 3\}$ هي زمرة جزئية من $U(20)$.

(2) $Z_4/\{0\} = \{1, 2, 3\}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب بالمقياس 4.

(3) مرتبة العنصر $<6>+5$ في زمرة الخارج $Z_{18}/<6>$ تساوي 3.

(4) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H = \{1, 11\}$ في الزمرة $U(30)$ يساوي 3.

(5) عدد عناصر زمرة الخارج $<20>/<4>$ يساوي 4.

(6) إذا كانت G زمرة مرتبتها 19 فإن G لا تكون زمرة دوارة.

(7) عناصر الزمرة الجزئية $H = <20>$ في الزمرة Z_{30} هي $\{10, 20\}$ فقط.

(8) جميع مولدات الزمرة الجمعية Z_8 التي لا تساوي 1 هي أعداد أولية.

(9) كل زمرة دوارة منتهية تملك مولدين فقط.

(10) عدد الهومومورفيزمات الغامرة من الزمرة Z_{12} إلى الزمرة Z_{30} يساوي 12.

(11) $Z_{12} \cong Z_6 \oplus Z_2$

(12) توجد 2 زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط مرتبتها 8 في الزمرة G التي مرتبتها 40.

السؤال الثاني (28 درجة): لتكن $(G, \cdot)$ زمرة ما، علل صحة ما يلي:

(1) إذا كان a عنصراً من G مرتبته n وإذا كان $t \in Z$ الذي يقسم n فإن رتبة $a^{\frac{n}{t}}$ تساوي t.

(2) إذا كانت G زمرة منتهية مرتبتها عدد أولي، فإن G تكون زمرة دوارة.

(3) إذا كانت H زمرة جزئية في G تحقق $(G : H) = 2$، فإن H تكون ناظمية في G.

(4) جميع الزمر الدوارة المنتهية التي لها المرتبة ذاتها ايزومورفية مع بعضها (متماثلة)

السؤال الثالث (36 درجة):

لتكن G زمرة و A , B زمرتين جزئيتين من G . أثبت ما يلي:

(1) إذا كانت AB زمرة جزئية في G، فإن $AB = (A \cup B)$.

(2) إذا كانت الزمرة A ناظمية في G ودوارة، فإن أية زمرة جزئية من A تكون ناظمية في G.

(3) إذا كانت G p-زمرة (p عدد أولي) فإن كل زمرة جزئية من G هي p- زمرة.

2013 - 2 - 3

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إيمان الخوجة